LISTA 10 – Dinâmica das Rotações

Questão 1)

Solução:

(a) Como a nuvem de gás é um sistema isolado, seu momento angular $\vec{L}_{CM}$ é conservado, onde CM é o centro de massa da nuvem. Por simplicidade podemos supor que o movimento da nuvem está sendo observado de um sistema de referência inercial no qual o CM está em repouso. Inicialmente a nuvem tem a forma de uma esfera uniforme de raio *a* girando com velocidade angular ω em torno de um eixo através de seu centro. Logo, seu momento angular é

$$\vec{L}_{CM} = I_{CM}\vec{\omega} = \left(\frac{2}{5}Ma^2\right)\omega\hat{k}$$

ônde $\hat{k}$ é um vetor unitário apontando na direção do eixo de rotação. Quando a nuvem tomar a forma de um disco circular uniforme de raio *b* girando em torno de um eixo através de seu centro e perpendicular a seu plano, seu momento angular será

$$\vec{L}'_{CM} = \left(\frac{1}{2}Mb^2\right)\omega'\hat{k}'$$

Como não há torques externos, o momento angular se conserva:

$$\vec{L}_{CM} = \vec{L}'_{CM} \;\Rightarrow\; \left(\frac{2}{5}Ma^2\right)\omega\hat{k} = \left(\frac{1}{2}Mb^2\right)\omega'\hat{k}'$$

Esta última relação nos diz que $\hat{k}' = \hat{k}'$ (ou seja, os dois eixos de rotação devem ser o mesmo) e que

$$\left(\frac{1}{2}Mb^2\right)\omega' = \left(\frac{2}{5}Ma^2\right)\omega$$

Portanto, a nova velocidade angular da nuvem é

$$\omega' = \left(\frac{4a^2}{5b^2}\right)\omega$$

(b) O aumento na *energia cinética* da nuvem é então dado por

$$\Delta K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Mb^2\right)\omega'^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}Ma^2\right)\omega^2$$
$$= \frac{1}{4}Mb^2\left(\frac{4a^2}{5b^2}\right)^2\omega^2 - \frac{1}{5}Ma^2\omega^2$$
$$= \frac{Ma^2\left(4a^2 - 5b^2\right)\omega^2}{25b^2}$$

<u>Questão 2)</u>

(a) Que comprimento do fio foi puxado?

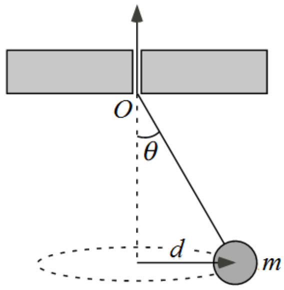
Resp: Δl =0,60 m

(b) De que fator variou a velocidade de rotação?

Resp: ω_2/ω_1 = 2,04

Solução:

(a) As equações de Newton para a bolinha são



$$0 = T\cos\theta - mg$$
$$\frac{mv^2}{d} = T\,\mathrm{sen}\,\theta$$

onde T é a tensão no fio e v a velocidade escalar da bolinha. Eliminando T dessas equações, temos que

$$v^2 = gd\tan\theta$$

A componente do momento angular da bolinha na direção vertical é

$$L = mvd = m\left(d^3 g\tan\theta\right)^{1/2}$$

Quando o fio é puxado para cima, das forças que atuam sobre a bolinha a tensão tem torque zero em relação a O e o torque da força peso em relação a O é perpendicular à direção vertical. Assim, a do momento angular da bolinha na direção vertical é conservada e

$$d_1^3\tan\theta_1 = d_2^3\tan\theta_2$$

Substituindo nesta expressão d_1 = 0,50m e $\theta_1 = 30^0$, $\theta_2 = 60^0$ encontramos d_2 = 0,35m. A variação do comprimento do fio entre O e a bolinha será

$$\Delta l = \frac{d_1}{\sin\theta_1} - \frac{d_2}{\sin\theta_2} = 1,00m - 0,40m = 0,60m$$

(b) Podemos escrever a conservação do momento angular como

$$m\omega_1 d_1^2 = m\omega_2 d_2^2$$

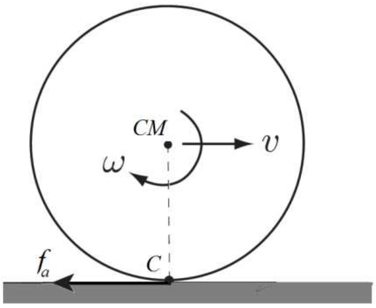
de onde,

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = \left(\frac{0,50}{0,35}\right)^2 = 2,04$$

<u>Questão 3)</u>

Solução:

(a) Na figura, por uma questão de clareza, omitimos as forças verticais. As equações do movimento da bola são



$$M\frac{dv}{dt} = -f_a$$
$$I_{CM}\frac{d\omega}{dt} = \tau_{CM}$$

onde $\vec{f}_a$ á a força de atrito e $\vec{\tau}_{CM}$ é o torque em relação ao centro de massa; *a* é o raio da bola e $I_{CM} = 2Ma^2/5$. Assim,

$$M\frac{dv}{dt} = -f_a$$
$$\frac{2}{5}Ma^2\frac{d\omega}{dt} = af_a$$

Substituindo a primeira equação na segunda e simplificando, podemos escrever

$$\frac{2}{5}a\frac{d\omega}{dt} = -\frac{dv}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\frac{2}{5}a\omega + v\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2}{5}a\omega + v = \text{constante}$$

Para determinar o valor da constante, usamos as condições iniciais $\omega = 0$, $v = V$ e obtemos a condição

$$\frac{2}{5}a\omega + v = V$$

que vale para qualquer instante. Quando a bola começar a rolar sem deslizar teremos a condição $v = \omega a$ que substituída na equação acima dá

$$\frac{2}{5}a\left(\frac{v}{a}\right) + v = V \;\Rightarrow\; \frac{7}{5}v = V \;\Rightarrow\; v = \frac{5}{7}V$$

Esta é a velocidade que a bola vai manter quando estiver rolando sem deslizar.

(b) A energia cinética final da bola será

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{5}{7}V\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}Ma^2\right)\left(\frac{5}{7}\frac{V}{a}\right)^2 = \left(\frac{7}{5}\frac{25}{49}\right)\frac{1}{2}MV^2 = \frac{5}{7}T_{inicial}$$

Logo, a bola perde 2/7 de sua energia cinética ao passar do regime de deslizamento para o de rolamento puro.

Questão 4)

Solução:

(a) O fio não realiza trabalho sobre o ioiô porque (i) o suporte está fixo, (ii) não há deslizamento entre o fio e o ioiô.

(b) As equações do movimento são:

$$mg - T = ma$$
$$Tr = I_{CM}\alpha$$

onde r é o raio do disco e α a aceleração angular do ioiô. Como o fio não desliza, $a = \alpha r$ e sabendo que $I_{CM} = mr^2/2$, a segunda equação fica:

$$T = \frac{1}{2}ma$$

Substituindo na primeira equação, obtemos

$$a = \frac{2}{3}g$$

Questão 5)

Solução:

(a) As equações do movimento são:

$$Mg\,\mathrm{sen}\,\theta - f = Ma$$
$$N - Mg\cos\theta = 0$$
$$fR = \frac{2}{5}MR^2\alpha$$

Nestas equações, α é a aceleração angular da bola, f é a força de atrito e usamos que o momento de inércia da bola em torno do CM é $2MR^2/5$, sendo R o raio da bola.

Vamos supor primeiro o caso de rolamento puro. Neste caso, $a = \alpha R$ e a terceira equação nos diz que $f = 2Ma/5$. Substituindo este resultado na primeira equação, achamos para a aceleração da bola:

$$a = \frac{5}{7} g \,\mathrm{sen}\,\theta$$

A força de atrito *f* para que haja rolamento sem deslizamento é, portanto,

$$f = \frac{2}{7} Mg \,\mathrm{sen}\,\theta$$

Assim, como da segunda equação $N = Mg\cos\theta$, temos que durante o movimento

$$\frac{f}{N} = \frac{2}{7}\tan\theta$$

Mas sabemos que $f \le \mu N$. Logo, para uma bola largada em repouso sobre o plano, rolamento sem deslizamento só será possível se $\mu > \frac{2}{7}\tan\theta$.

Suponha agora que $\mu < \frac{2}{7}\tan\theta$. Neste caso, vimos acima que a bola vai sempre deslizar. A força de atrito será então (supondo que o coeficiente de atrito estático μ seja aproximadamente igual ao coeficiente de atrito cinético)

$$f = \mu N = \mu Mg\cos\theta$$

Substituindo na primeira equação do movimento, achamos para a aceleração no caso em que há deslizamento,

$$a = \left(\mathrm{sen}\,\theta - \mu\cos\theta\right) g$$